עבודת קיץ לתלמידים העולים לכיתה י' 4-5 יח"ל

נושאי לימוד:

1. משוואות ריבועיות עמ' 12-13 תרגילים 39, 50, 57, 63, 65.
2. משוואות עם נעלמים במכנה עמ' 162-164 תרגילים 54, 56, 68, 69, 92.
3. משוואות דו- ריבועיות עמ' 190-191 תרגילים 14, 16, 21, 35, 36.
4. אי שוויונים ריבועיים עמ' 220-221 תרגילים 35,37,38,39,40.
5. קטע אמצעים במשולש עמ' 440-441 תרגילים 8-12.
6. קטע אמצעים בטרפז עמ' 449 תרגילים 7-11.
7. מרובעים: מלבן תרגילים 9,19; מעוין תרגילים 5,15; ריבוע תרגיל 5.

משוואות ריבועיות נוספות

פתור את המשוואות הבאות:

36. $x^2 + 6 = 5x$
37. $5x^2 + 20 = 3x^2 + 52$
38. $5x^2 + 8x - 1 = 8x^2 - 5x - 1$
39. $4x^2 + 20 = 2x^2 + 7$
40. $20 = x^2 - 2x + 21$
41. $x(x - 6) = 7$
42. $3x(x + 2) = 8(x + 1)$
43. $34 - 3(10 - x) = x^2$
44. $2x(x + 3) - (x + 3) = 0$
45. $(x + 4)(x + 7) = 70$
46. $3(x - 2)(5 - x) = 2 - (4x + 10)$
47. $(x-4)(x-4)-(4x+5)(3x-10)=17x-110$
48. $(x + 1)^2 = 1 - x^2$
49. $(x - 3)^2 = x(5 - x)$
50. $(3x - 1)^2 - 2(x + 1) = 0$
51. $10 + 3(x + 2)^2 = x + 14$
52. $-2(x - 5)^2 = (2x + 1)^2 - 57$
53. $(x + 5)^2 - (x - 6)^2 = 121$
54. $44 - (x - 4)^2 = (x + 6)(x - 6)$
55. $(x - 6)(x + 8) = 0$
56. $(x - 3)(x + 3) = 0$
57. $(x - 5)^2 = 0$

58. $6(3x+1)^2=0$

59. $\frac{x^2-10}{6}=15$

60. $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$

61. $\frac{2}{5}x^2-x+\frac{3}{5}=0$

62. $\frac{(x+4)(x-2)}{4}=10$

63. $6x+\frac{(3x+1)^2}{4}=10$

64. $3(1-4x)-\frac{(2x-1)^2}{2}=7$

65. $2(3-x)-\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{1}{3}=0$

תשובות: **36.** 2 , 3. **37.** −4 , 4. **38.** $4\frac{1}{3}$, 0. **39.** אין פתרון. **40.** 1.
41. −1 , 7. **42.** $-\frac{4}{3}$, 2. **43.** −1 , 4. **44.** −3 , $\frac{1}{2}$. **45.** −14 , 3. **46.** 1 , $7\frac{1}{3}$.
47. −4 , 4. **48.** −1 , 0. **49.** 1 , 4.5. **50.** $-\frac{1}{9}$, 1. **51.** $-2\frac{2}{3}$, −1. **52.** $-\frac{1}{3}$, 3.
53. 6. **54.** 8 , −4. **55.** 6 , −8. **56.** 3 , −3. **57.** 5. **58.** $-\frac{1}{3}$. **59.** 10 , −10.
60. 1 , $-\frac{3}{4}$. **61.** 1 , $1\frac{1}{2}$. **62.** 6 , −8. **63.** 1 , $-4\frac{1}{3}$. **64.** −0.5 , −4.5. **65.** 3 , −5.

משוואות עם נעלמים במכנה

בסעיף זה נעסוק במשוואות עם נעלמים במכנה.
השלבים לפתרון משוואה כזו הם:
א. נפרק לגורמים את הביטויים שבמכנים (אם זה אפשרי)
ב. נמצא את המכנה המשותף המינימלי של כל הביטויים שבמכנים.
ג. נכפול את המשוואה במכנה המשותף המינימלי. נקבל משוואה ללא שברים ונמצא את הפתרון או הפתרונות של המשוואה שהתקבלה.
ד. נבדוק האם הפתרון או הפתרונות שקיבלנו מאפסים מכנה. פתרון שמאפס מכנה אינו שייך לתחום ההצבה של המשוואה ולכן יש לבטלו.

דוגמה:
פתור את המשוואה $\frac{10}{x-7}-\frac{9}{x}=4$.
פתרון:
במשוואה זו לא ניתן לפרק לגורמים את הביטויים שבמכנים.
המכנה המשותף המינימלי הוא $x(x-7)$. נכפול את המשוואה במכנה המשותף המינימלי. נקבל: $10x-9(x-7)=4x(x-7)$.
נפתח סוגריים. נקבל: $10x-9x+63=4x^2-28x$ ומכאן $4x^2-29x-63=0$.
פתרונות המשוואה הריבועית שהתקבלה הם $x=9$ או $x=-1.75$.
הפתרון $x=9$ לא מאפס אף מכנה ולכן הוא מתאים.
הפתרון $x=-1.75$ לא מאפס אף מכנה ולכן גם הוא מתאים.
לסיכום, למשוואה יש שני פתרונות והם: $x=9$, $x=-1.75$.

דוגמה:
פתור את המשוואה $\frac{x+2}{x^2-5x}=\frac{3x-1}{x^2-25}$.
פתרון:
נפרק לגורמים את המכנים.
במכנה השמאלי x^2-5x נוציא גורם משותף ונקבל $x(x-5)$.
את המכנה הימני x^2-25 נפרק לפי הנוסחה $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
ונקבל $(x-5)(x+5)$. המשוואה המתקבלת היא: $\frac{x+2}{x(x-5)}=\frac{3x-1}{(x-5)(x+5)}$.
נכפול במכנה המשותף המינימלי שהוא $x(x-5)(x+5)$.
נקבל: $(x+2)(x+5)=x(3x-1)$. נפתח סוגריים, נכנס איברים ונקבל את המשוואה הריבועית $2x^2-8x-10=0$.
פתרונות המשוואה הם $x=-1$ או $x=5$.
הפתרון $x=-1$ לא מאפס אף מכנה ולכן הוא פתרון מתאים.
הפתרון $x=5$ מאפס את המכנה השמאלי (וגם את הימני) ולכן יש לבטלו.
לסיכום: למשוואה פתרון יחיד שהוא $x=-1$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $\frac{2x-1}{x^2-6x-7}=\frac{x-8}{x^2-14x+49}$.

פתרון:

נפרק לגורמים את המכנים.

את המכנה x^2-6x-7 נפרק לפי פירוק הטרינום ונקבל $(x-7)(x+1)$.

את המכנה $x^2-14x+49$ נפרק לפי הנוסחה $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

ונקבל: $(x-7)^2$. המשוואה המתקבלת היא: $\frac{2x-1}{(x-7)(x+1)}=\frac{x-8}{(x-7)^2}$

נכפול במכנה המשותף המינימלי שהוא $(x+1)(x-7)^2$.

נקבל: $(x-7)(2x-1)=(x+1)(x-8)$. לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים

נקבל את המשוואה הריבועית $x^2-8x+15=0$.

פתרונות המשוואה הם $x=3$ או $x=5$.

הפתרונות אינם מאפסים אף אחד מהמכנים ולכן שניהם נמצאים בתחום ההצבה של המשוואה.

לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x=3$, $x=5$.

משוואות דו-ריבועיות

משוואה מהצורה $ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0)$ נקראת משוואה דו-ריבועית.
כדי לפתור משוואה דו-ריבועית ניעזר בנעלם אחר.
השלבים לפתרון משוואה כזו הם:
א. נסמן $x^2=t$. אם נעלה בריבוע, נקבל: $x^4=t^2$.
ב. נרשום את המשוואה בעזרת הנעלם t. נקבל את המשוואה הריבועית $at^2+bt+c=0$ ונמצא את הפתרונות t_1 ו- t_2 (אם הם קיימים).
ג. לאחר שקיבלנו את t נמצא את x לפי הסימון $x^2=t$.

דוגמה:
פתור את המשוואה $x^4-25x^2+144=0$.
פתרון:
נסמן $x^2=t$ ונקבל את המשוואה הריבועית $t^2-25t+144=0$.
פתרונות המשוואה הם $t=16$ או $t=9$.
כדי למצוא את הנעלם x נחזור לסימון $x^2=t$.
עבור $t=16$ נקבל $x^2=16$ ומכאן $x=4$ או $x=-4$.
עבור $t=9$ נקבל $x^2=9$ ומכאן $x=3$ או $x=-3$.
לסיכום, למשוואה הדו-ריבועית $x^4-25x^2+144=0$
יש 4 פתרונות: $x=4$ או $x=-4$ או $x=3$ או $x=-3$.

דוגמה:
פתור את המשוואה $4x^4+11x^2-3=0$.
פתרון:
נסמן $x^2=t$ ונקבל את המשוואה הריבועית $4t^2+11t-3=0$.
פתרונות המשוואה הם $t=-3$ או $t=\frac{1}{4}$.
עבור $t=-3$ נקבל $x^2=-3$. למשוואה זו אין פתרונות ממשיים.
עבור $t=\frac{1}{4}$ נקבל $x^2=\frac{1}{4}$ ומכאן $x=\frac{1}{2}$ או $x=-\frac{1}{2}$.
לסיכום: פתרונות המשוואה הם $x=\frac{1}{2}$ או $x=-\frac{1}{2}$.

שים לב!
על-פי חוקי חזקות מתקיים: $(x^n)^2=x^{2n}$.
לכן, אם נסמן: $x^n=t$, אזי $x^{2n}=t^2$.
בעזרת כלל זה ניתן לפתור כל משוואה מהצורה $ax^{2n}+bx^n+c=0$
על-ידי כך שנסמן: $x^n=t$, $x^{2n}=t^2$.

דוגמה:

פתור את המשוואה: $x^6-7x^3-8=0$.

פתרון:

נסמן $x^3=t$ ונקבל את המשוואה הריבועית $t^2-7t-8=0$.

פתרונות המשוואה הם $t=8$ או $t=-1$.

עבור $t=8$ נקבל $x^3=8$ ומכאן $x=\sqrt[3]{8}$, כלומר $x=2$.

עבור $t=-1$ נקבל $x^3=-1$ ומכאן $x=\sqrt[3]{-1}$, כלומר $x=-1$.

לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x=2$ או $x=-1$.

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות:

1. $x^4-10x^2+9=0$
2. $x^4-5x^2+4=0$
3. $x^4-13x^2+36=0$
4. $x^4-26x^2+25=0$
5. $36x^4-13x^2+1=0$
6. $4x^4-17x^2+4=0$
7. $x^4-18x^2+81=0$
8. $16x^4-8x^2+1=0$
9. $x^4-3x^2-4=0$
10. $x^4+8x^2-9=0$
11. $2x^4-7x^2-4=0$
12. $2x^4+5x^2+3=0$
13. $x^4+10x^2+25=0$
14. $x^4-6x^2+10=0$
15. $x^4-8x^2+12=0$
16. $x^4-11x^2+18=0$
17. $x^4-8x^2-20=0$
18. $9x^4-19x^2+2=0$
19. $6x^4-5x^2+1=0$
20. $15x^4-8x^2+1=0$
21. $25x^4-40x^2+16=0$
22. $4x^4-25x^2=0$
23. $x^4+49x^2=0$
24. $(x^2+2)(x^2-12)=72$
25. $x^2(x-4)=x^3(x+1)-5$
26. $(x^2-4)^2+3x^2=12$
27. $(x^2+5)^2+(x^2-6)^2=121$
28. $(x^2+x+3)(x^2-x+3)=45$

29. $(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)=9$

30. $\frac{8}{x^2}+\frac{x^2+2}{x^4}=11$

31. $(x^2+4)(\frac{12}{x^2}+2)=40$

32. $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2=3x^2+4$

33. $x^6-9x^3+8=0$

34. $x^6-26x^3-27=0$

35. $x^6+65x^3+64=0$

36. $x^8-25x^4+144=0$

37. $x^{10}-31x^5-32=0$

38. $\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{7x^2-4}{x^4-4x^2}$

39. $\frac{x^2+5}{x^2-1}=\frac{45}{x^4-1}$

40. $\frac{1}{x^2-3}+\frac{7}{x^2+3}=\frac{14}{x^4-9}$

41. ★ $\frac{x^2-3}{3x^2-24}-\frac{11}{x^2+2}=1-\frac{x^2-9}{x^4-6x^2-16}$

תשובות: **1.** ±1, ±3. **2.** ±1, ±2. **3.** ±2, ±3. **4.** ±1, ±5. **5.** $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{2}$.
6. $\pm\frac{1}{2}$, ±2. **7.** ±3. **8.** $\pm\frac{1}{2}$. **9.** ±2. **10.** ±1. **11.** ±2. **12.** אין פתרון.
13. אין פתרון. **14.** אין פתרון. **15.** $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{6}$. **16.** $\pm\sqrt{2}$, ±3. **17.** $\pm\sqrt{10}$.
18. $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\sqrt{2}$. **19.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **20.** $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **21.** $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. **22.** 0, ±2.5.
23. 0. **24.** ±4. **25.** ±1. **26.** ±1, ±2. **27.** ±2. **28.** $\pm\sqrt{6}$. **29.** $\pm2\sqrt{2}$. **30.** ±1.
31. $\pm\sqrt{6}$, ±2. **32.** ±2. **33.** 1, 2. **34.** -1, 3. **35.** -4, -1. **36.** $\pm\sqrt{3}$, ±2.
37. -1, 2. **38.** $\pm\sqrt{2}$. **39.** ±2. **40.** ±2. **41.** ±3.

אי-שוויונים ממעלה שנייה

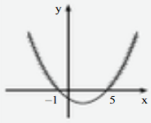
מבוא – תחומי חיוביות ושליליות

תחומי החיוביות של פונקציה הם התחומים שבהם ערכי ה- y של הפונקציה הם חיוביים, כלומר גרף הפונקציה נמצא מעל ציר ה- x.

תחומי השליליות של פונקציה הם התחומים שבהם ערכי ה- y של הפונקציה הם שליליים, כלומר גרף הפונקציה נמצא מתחת ציר ה- x.

דוגמה:

בציור מתואר גרף הפונקציה $y=x^2-4x-5$.
נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x הן $(5;0)$ ו- $(-1;0)$.



א. רשום את תחומי החיוביות של הפונקציה.
ב. רשום את תחומי השליליות של הפונקציה.

פתרון:

א. תחומי החיוביות של הפונקציה הם התחומים שבהם גרף הפונקציה נמצא מעל ציר ה- x (התחומים המסומנים במקווקו בציור). במקרה שלפנינו הפונקציה חיובית עבור ערכי x הגדולים מ- 5 או עבור ערכי x הקטנים מ- -1, ולכן תחומי החיוביות הם: $x>5$ או $x<-1$.

ב. תחומי השליליות של הפונקציה הם התחומים שבהם גרף הפונקציה נמצא מתחת לציר ה- x. במקרה שלפנינו הפונקציה שלילית עבור ערכי x הגדולים מ- -1 וגם קטנים מ- 5, ולכן תחום השליליות הוא: $-1<x<5$.

אי-שוויונים ממעלה שנייה

אי-שוויון ממעלה שנייה (אי-שוויון ריבועי) הוא אי-שוויון שבעזרת פעולות אלגבריות ניתן להביאו לאחת מהצורות הבאות:

(1) $ax^2+bx+c>0$ (2) $ax^2+bx+c<0$

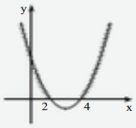
(3) $ax^2+bx+c\geq 0$ (4) $ax^2+bx+c\leq 0$

למשל, אי-השוויונים הבאים הם אי-שוויונים ממעלה שנייה:
$x^2-7x+10>0$, $-2x^2+5x-3<0$, $2x^2+8\geq 0$.

פתרון אי-שוויון ממעלה שנייה מתבסס על גרף הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

(1) הפתרון של אי-השוויון $ax^2+bx+c>0$ הוא למעשה תחומי החיוביות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

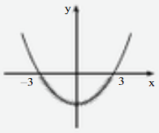
למשל, בציור מתואר גרף הפרבולה $y=x^2-6x+8$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(2;0)$ ו- $(4;0)$.



תחומי החיוביות של הפרבולה הם $x>4$ או $x<2$, ולכן גם פתרון אי-השוויון $x^2-6x+8>0$ הוא $x>4$ או $x<2$.

(2) הפתרון של אי-השוויון $ax^2+bx+c<0$ הוא למעשה תחומי השליליות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

למשל, בציור מתואר גרף הפרבולה $y=x^2-9$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(3;0)$ ו- $(-3;0)$.



תחום השליליות של הפרבולה הוא $-3<x<3$ ולכן גם פתרון אי-השוויון $x^2-9<0$ הוא $-3<x<3$.

(3) הפתרון של אי-השוויון $ax^2+bx+c\geq 0$ הוא למעשה תחומי החיוביות או ההתאפסות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

(4) הפתרון של אי-השוויון $ax^2+bx+c\leq 0$ הוא למעשה תחומי השליליות או ההתאפסות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

נסכם את השלבים לפתרון אי-שוויון ממעלה שנייה:

א. נפתור את המשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$ ונמצא את שורשי המשוואה x_1 ו- x_2 (אם הם קיימים). שורשים אלה מהווים את נקודות החיתוך של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ עם ציר ה- x.

ב. נשרטט את הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ באופן הבא:

(1) נסמן את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x.

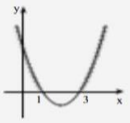
(2) אם $a>0$, הפרבולה היא ישרה, כלומר לגרף הפרבולה יש מינימום וצורת הפרבולה היא $\cup$.
לעומת זאת, אם $a<0$, הפרבולה היא הפוכה, כלומר לגרף הפרבולה יש מקסימום וצורת הפרבולה היא $\cap$.

שים לב! לצורך פתרון אי-שוויון ממעלה שנייה מספיק לשרטט את הפרבולה על סמך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x והערך של a (המקדם של x^2). אין צורך למצוא את קדקוד הפרבולה או את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y.

ג. נרשום את פתרון אי-השוויון לפי הכלל הבא:
אם אי-השוויון הוא $ax^2+bx+c>0$, אז פתרון אי-השוויון הוא תחומי החיוביות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.
אם אי-השוויון הוא $ax^2+bx+c<0$, אז פתרון אי-השוויון הוא תחומי השליליות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.
אם אי-השוויון הוא $ax^2+bx+c\geq 0$, אז פתרון אי-השוויון הוא תחומי החיוביות או ההתאפסות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.
אם אי-השוויון הוא $ax^2+bx+c\leq 0$, אז פתרון אי-השוויון הוא תחומי השליליות או ההתאפסות של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

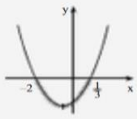
דוגמה:
פתור את אי השוויון $x^2-4x+3>0$.

פתרון:
א. נפתור את המשוואה $x^2-4x+3=0$.
פתרונות המשוואה הם $x=1$ או $x=3$.
ב. נסמן את הפתרונות על ציר ה-x
ונשרטט את הפרבולה הישרה $y=x^2-4x+3$.
ג. פתרון אי-השוויון $x^2-4x+3>0$
הוא תחומי החיוביות של הפרבולה,
כלומר פתרון אי-השוויון הוא $x>3$ או $x<1$.



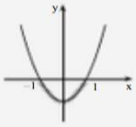
דוגמה:
פתור את אי-השוויון $3x^2<-5x+2$.

פתרון:
נרכז את כל הביטויים באגף שמאל.
נקבל את אי-השוויון הריבועי $3x^2+5x-2<0$.
א. נפתור את המשוואה $3x^2+5x-2=0$.
פתרונות המשוואה הם $x=\frac{1}{3}$ או $x=-2$.
ב. נסמן את הפתרונות על ציר ה-x
ונשרטט את הפרבולה הישרה $y=3x^2+5x-2$.
ג. פתרון אי-השוויון $3x^2+5x-2<0$
הוא תחום השליליות של הפרבולה,
כלומר פתרון אי-השוויון הוא $-2<x<\frac{1}{3}$.



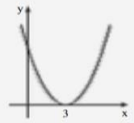
דוגמה:
פתור את אי-השוויון $x^2-1\leq 0$.

פתרון:
א. נפתור את המשוואה $x^2-1=0$.
פתרונות המשוואה הם $x=1$ או $x=-1$.
ב. נסמן את הפתרונות על ציר ה-x
ונשרטט את הפרבולה הישרה $y=x^2-1$.
ג. פתרון אי-השוויון הוא התחום שבו
הפרבולה $y=x^2-1$ שלילית או שווה
לאפס, כלומר הפתרון הוא $-1\leq x\leq 1$.



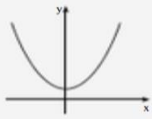
דוגמה:
פתור את אי-השוויון $x^2-6x+9>0$.

פתרון:
א. נפתור את המשוואה $x^2-6x+9=0$.
פתרון המשוואה הוא $x=3$.
ב. נסמן את הפתרון $x=3$ על ציר ה-x
ונשרטט את הפרבולה
הישרה $y=x^2-6x+9$.
פתרון אי-השוויון הוא תחומי החיוביות
של הפרבולה, כלומר $x>3$ או $x<3$
(שים לב לכך שבנקודה $x=3$ הפרבולה מתאפסת ואינה חיובית).
נוהגים לרשום פתרון כזה בצורה $x\neq 3$.



דוגמה:
פתור את אי-השוויון $x^2+1\leq 0$.

פתרון:
נפתור את המשוואה $x^2+1=0$ ומכאן $x^2=-1$.
למשוואה אין פתרונות ממשיים ולכן נקבל
פרבולה ישרה שאינה חותכת את ציר ה-x,
כלומר גרף הפרבולה נמצא כולו מעל ציר ה-x.
פתרון אי-השוויון הוא התחום שבו הפרבולה
שלילית או שווה לאפס.
מכיוון שתחום כזה אינו קיים, פתרון
אי-השוויון הוא **"אף x"**.



תרגילים

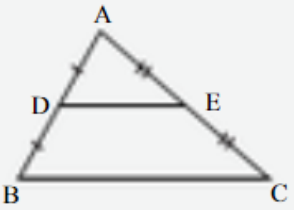
פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $x^2-7x+10<0$
2. $x^2-2x-15<0$
3. $x^2+4x+3\le 0$
4. $x^2-6x+5>0$
5. $3x^2+4x+1>0$
6. $2x^2-7x+3\ge 0$
7. $-x^2+10x-21>0$
8. $-x^2-x+20\le 0$
9. $-3x^2+7x+10<0$
10. $6-x-7x^2\ge 0$
11. $x^2+x-3\frac{3}{4}>0$
12. $2x^2+\frac{1}{2}x-7<0$
13. $x^2-8x+5<0$
14. $2x^2-5x+1\ge 0$
15. $x^2-4x+1>0$
16. $x^2-4x\ge 0$
17. $2x^2+10x<0$
18. $3x^2>7x$
19. $x^2-4<0$
20. $x^2-25\ge 0$
21. $3x^2-48>0$
22. $25x^2-1\le 0$
23. $x^2<9$
24. $2x^2>12$
25. $x^2-4x+4>0$
26. $x^2+8x+16\ge 0$
27. $4x^2-20x+25<0$
28. $x^2-20x+100\le 0$
29. $x^2+6x+9>0$
30. $4x^2-12x+9<0$
31. $x^2-12x+36\ge 0$
32. $9x^2-24x+16\le 0$
33. $x^2>0$
34. $-x^2+10x-25<0$
35. $-4x^2-28x-49>0$
36. $-8x^2\le 0$
37. $x^2-6x+10>0$
38. $x^2-8x+20<0$
39. $x^2-4x+5\le 0$
40. $x^2-x+6\ge 0$

תשובות: 1. $2<x<5$. 2. $-3<x<5$. 3. $-3\le x\le -1$. 4. $x>5$ או $x<1$.
5. $x>-\frac{1}{3}$ או $x<-1$. 6. $x\ge 3$ או $x\le \frac{1}{2}$. 7. $3<x<7$. 8. $x\ge 4$ או $x\le -5$.
9. $x>3\frac{1}{3}$ או $x<-1$. 10. $-1\le x\le \frac{6}{7}$. 11. $x>1.5$ או $x<-2.5$. 12. $-2<x<1.75$.
13. $0.68<x<7.32$. 14. $x\ge 2.281$ או $x\le 0.219$. 15. $x>3.732$ או $x<0.268$.
16. $x\ge 4$ או $x\le 0$. 17. $-5<x<0$. 18. $x>2\frac{1}{3}$ או $x<0$. 19. $-2<x<2$.
20. $x\ge 5$ או $x\le -5$. 21. $x>4$ או $x<-4$. 22. $-0.2\le x\le 0.2$. 23. $-3<x<3$.
24. $x>\sqrt{6}$ או $x<-\sqrt{6}$. 25. $x\ne 2$. 26. כל x פתרון. 27. אין פתרון.
28. $x=10$. 29. $x\ne -3$. 30. אין פתרון. 31. כל x פתרון. 32. $x=1\frac{1}{3}$. 33. $x\ne 0$.
34. $x\ne 5$. 35. אין פתרון. 36. כל x פתרון. 37. כל x פתרון. 38. אין פתרון.
39. אין פתרון. 40. כל x פתרון. 41. כל x פתרון. 42. אין פתרון.

קטע אמצעים במשולש

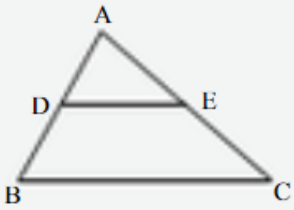
קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.



אם במשולש ABC, הנקודות D ו- E
הן אמצעי הצלעות AB ו- AC בהתאמה,
אז DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

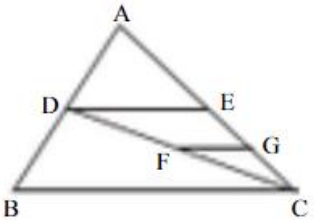
שים לב!
בכל משולש יש שלושה
קטעי אמצעים.

משפט: קטע אמצעים במשולש המחבר את האמצעים של שתי צלעות במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.



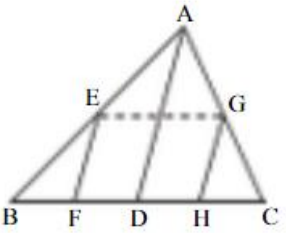
אם DE הוא קטע אמצעים במשולש,
המחבר את אמצעי הצלעות AB ו- AC,
אזי מתקיים:
(1) $DE \parallel BC$. (2) $DE=\frac{1}{2}BC$.

8. DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
GF הוא קטע אמצעים במשולש DEC.
א. נתון: $BC = 12$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע GF.
ב. הוכח: $AC = 4GE$.

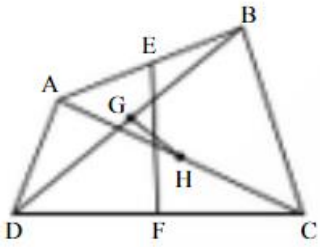


תשובה: א. 3 ס"מ.

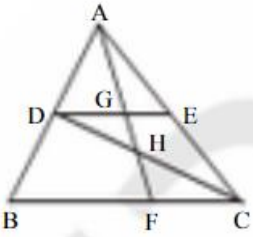
9. הנקודה D נמצאת על הצלע BC במשולש ABC.
EF הוא קטע אמצעים במשולש ABD.
GH הוא קטע אמצעים במשולש ACD.
א. הוכח: המרובע $EFHG$ הוא מקבילית.
ב. הוכח: $EG = \frac{1}{2}BC$.



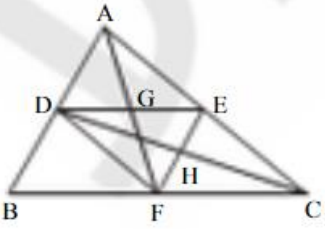
10. במרובע $ABCD$ הנקודות E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-CD, בהתאמה. הנקודות G ו-H הן אמצעי האלכסונים BD ו-AC, בהתאמה. הוכח: $GE = FH$.



11. DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
F היא נקודה על הצלע BC.
AF ו-DE נחתכים בנקודה G.
נתון: $BF = 2CF$. הוכח: $CH = DH$.

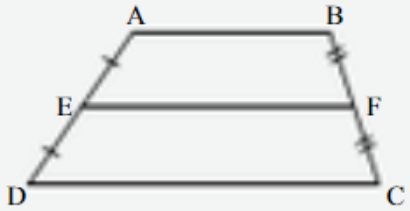


12. במשולש ABC, הנקודות D, E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB, AC ו-BC.
א. הוכח: המרובעים $ADFE$ ו-$DECF$ הם מקבילויות.
ב. הוכח: $AC = 4GH$.



קטע אמצעים בטרפז

קטע המחבר את אמצעי השוקיים של טרפז נקרא קטע אמצעים בטרפז.



אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
ונתון: $AE = DE$, $BF = FC$,
אזי EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

משפט: קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסי הטרפז ושווה למחצית סכומם.

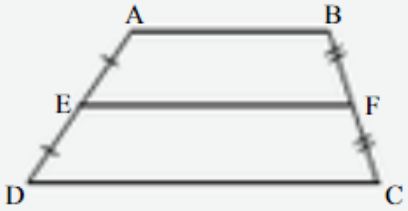
אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $AB \parallel DC$ ו- EF הוא קטע אמצעים בטרפז, אזי מתקיים:

(1) $EF \parallel AB$, $EF \parallel DC$.

(2) $EF = \frac{AB + DC}{2}$.

כאשר נתון קטע המחבר נקודות על שוקי הטרפז נוכל להוכיח שהוא קטע אמצעים בטרפז גם בהסתמך על המשפט הבא:

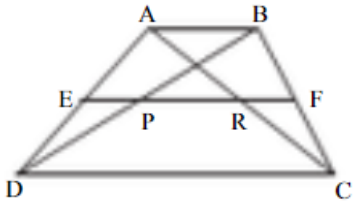
משפט: קטע היוצא מאמצע שוק אחת של הטרפז ומקביל לאחד מבסיסי הטרפז הוא קטע אמצעים בטרפז.



אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
ונתון: $AE = DE$, $EF \parallel AB$,
אזי EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

הערה: מהעובדה ש- EF הוא קטע אמצעים בטרפז, נובע ש- EF חוצה את השוק השנייה BC, כלומר $BF = FC$. כמו כן, נובע ש- EF שווה למחצית סכומם של בסיסי הטרפז, כלומר $EF = \frac{AB + DC}{2}$.

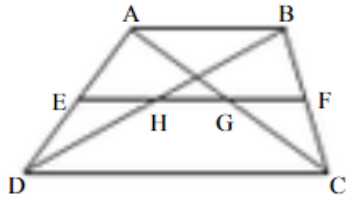
7. EF הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$.
EF חותך את האלכסונים AC ו- BD בנקודות R ו- P בהתאמה.



א. הוכח: $EP = RF$.

ב. הוכח: $PR = \frac{DC - AB}{2}$.

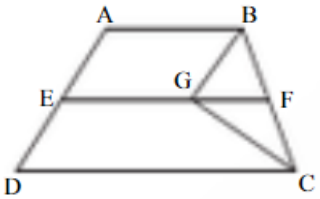
8. $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$ שבו $DC = 2AB$.
EF הוא קטע אמצעים בטרפז. AC ו- BD חותכים את EF בנקודות G ו- H.



א. הוכח: $EH = HG = GF$.

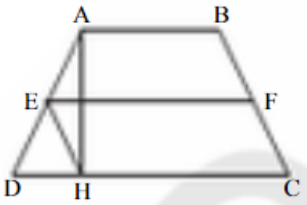
ב. הוכח: $AH \parallel BF$.

9. EF הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$.
G היא נקודה על הקטע EF.
הקטע BG חוצה את הזווית ABC.



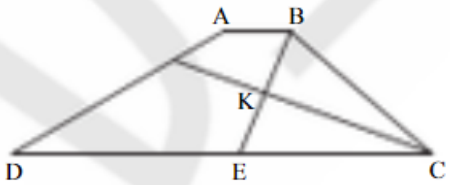
הוכח: $BG \perp CG$.

10. המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים $(AD = BC)$. EF הוא קטע אמצעים בטרפז.
AH הוא גובה בטרפז.



הוכח: המרובע $EFCH$ הוא מקבילית.

11. בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ חוצה-זווית ABC חותך את חוצה-זווית BCD בנקודה K, ואת הבסיס DC בנקודה E.



א. הוכח: $\sphericalangle BKC = 90^\circ$.

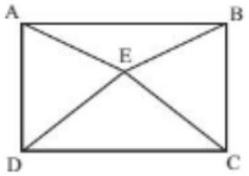
ב. דרך הנקודה K מעבירים מקביל לבסיסי הטרפז. הוכח כי המקביל הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$.

ג. נתון: $BC = 6$ ס"מ, $AB = 2$ ס"מ, $DE = 8$ ס"מ.
חשב את האורך של קטע האמצעים בטרפז $ABCD$. נמק.

תשובה: ג. 8 ס"מ.

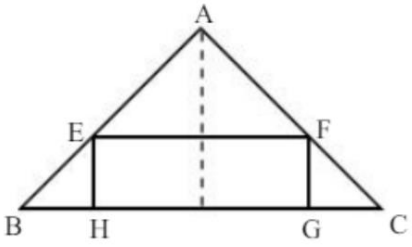
<u>מלבן:</u>

4. הנקודה E נמצאת בתוך מלבן ABCD.
נתון: $DE = CE$.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. נתון: $\sphericalangle AEB = 130^\circ$, $\sphericalangle BCE = 55^\circ$.
חשב את הזווית BEC.



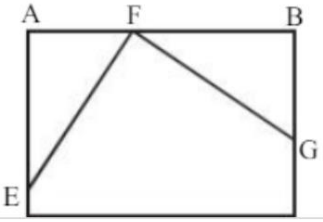
תשובה: ב. 60°.

9. המשולש ABC הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$). המלבן EFGH שהיקפו 16 ס"מ חסום בתוך המשולש.
אורך הגובה המורד מקדקוד A לצלע BC הוא 5 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EH.



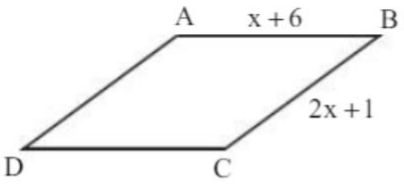
תשובה: 2 ס"מ.

10. הנקודות E, F ו- G נמצאות על צלעות המלבן ABCD.
נתון: $AE = BF$, $AF = BG$.
א. הוכח: $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BGF$
ב. הוכח: $EF \perp GF$.



<u>מעוין:</u>

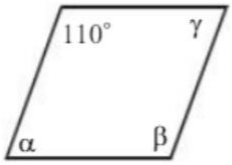
1. בציור שלפניך מתואר מעוין ABCD .
א. מצא את x .
ב. חשב את היקף המעוין.



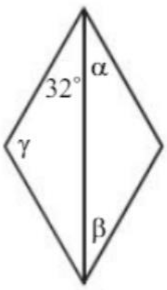
תשובה: א. 5 . ב. 44 .

2. חשב את הזוויות α , β ו- γ במעוינים הבאים:

א.

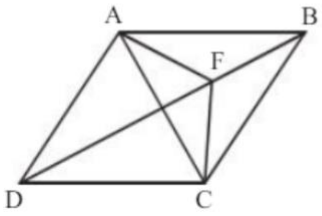


ב.

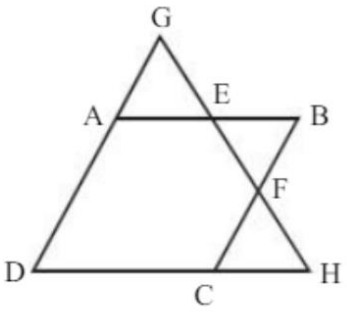


תשובה: א. $\alpha=70^\circ$, $\beta=110^\circ$, $\gamma=70^\circ$. ב. $\alpha=32^\circ$, $\beta=32^\circ$, $\gamma=116^\circ$.

5. המרובע ABCD הוא מעוין.
F היא נקודה הנמצאת
על האלכסון BD .
הוכח: המשולש ACF הוא שווה-שוקיים.

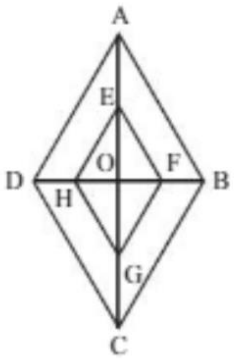


8. המרובע ABCD הוא מעוין.
הנקודות E ו- F הן אמצעי הצלעות AB ו- BC בהתאמה.
א. הוכח: $GE = FH$.
ב. חשב את היחס $CF : DG$.

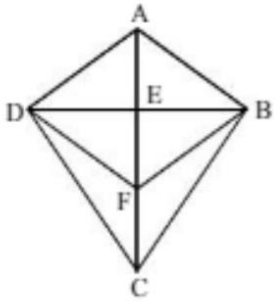


תשובה: ב. $1:3$.

14. המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.
הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הקטעים AO, BO, CO ו- DO בהתאמה.
הוכח: המרובע EFGH הוא מעוין.

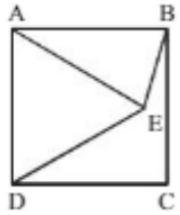


15. המרובע ABCD הוא דלתון $(AB = AD \ , \ BC = DC)$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה E.
נתון: $CE = 2AE$, F אמצע הקטע CE.
הוכח: המרובע ABFD הוא מעוין.



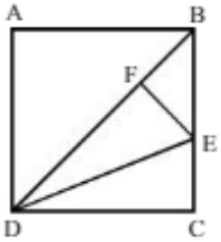
ריבוע:

4. המרובע $ABCD$ הוא ריבוע והמשולש ADE הוא משולש שווה צלעות.
א. הוכח: $DE = AB$.
ב. חשב את זוויותיו של המשולש ABE.

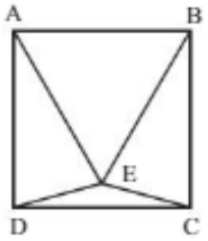


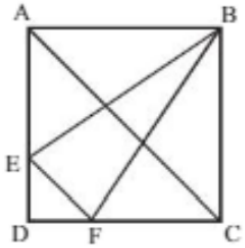
תשובה: ב. $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

5. המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.
הקטע DE חוצה את הזווית BDC.
נתון: $EF \perp BD$.
הוכח: $CE = BF$.



6. המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.
הנקודה E נמצאת בתוך הריבוע כך שמתקיים $DE = CE$.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. נתון: $\sphericalangle AEB = 60^\circ$.
חשב את הזווית DEC.



תשובה: ב. 150°.

7. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AD ו-DC של ריבוע $ABCD$.
נתון: $EF \parallel AC$. הוכח: $BE = BF$.